



第3章 附加材料

— 簡介 —

我們的課程特意設置得簡潔明了，如果您希望有更多示例和討論來幫助您更好地理解課程內容，那麼您來對地方了！本文檔包含第3章課程中某些遊戲的補充材料。

我們給出了許多已解決難題的示例，以及有關如何設計有序的附加說明。早期家庭數學計劃基於這樣的理念，即早期數學是家庭應該一起做的事情，而讓孩子與您一起做謎題是該過程的重要組成部分。一旦掌握了每個遊戲，您應該會發現，即使不是全部，大多數遊戲也很容易設計。

其中的遊戲各具有不同的級別的難度。在接下來的內容中，有許多關於如何設計這些級別遊戲的建議和示例。始終從最簡單的遊戲開始。讓您的孩子通過簡單的遊戲來體驗成功和學習的樂趣，比從一開始就接觸過於困難的遊戲而導致沮喪要好得多。一旦您的孩子對數學建立了信心和產生了興趣，就可以慢慢增加難度了。值得一提的是，並非所有遊戲都符合每個人的興趣，因此不必要求孩子完成所有遊戲。

本章节包含以下內容：

- 第3章—形狀求和
- 第3章—加倍限制取物遊戲
- 第3章—偶數和奇數和
- 第3章—總和組
- 第3章—動物園救援行動
- 第3章—常見點數和
- 第3章—數獨變化型
- 第3章—有多少種方法
- 第3章—紙牌順序排列
- 第3章—數字差值金字塔

— 法律資料 —

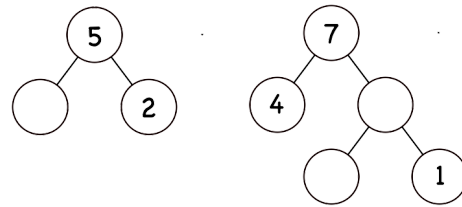
每個家庭都應該有機會一起學習和享受數學。為此，“早期家庭數學”是一系列材料，家庭和教育工作者可以在未經徵得許可的情況下自由地編輯，翻譯，複製和分發，僅用於非商業用途。

©早期家庭數學版權所有- 2025 v。1.1創用CC: Attribution-NonCommercial 4.0國際許可

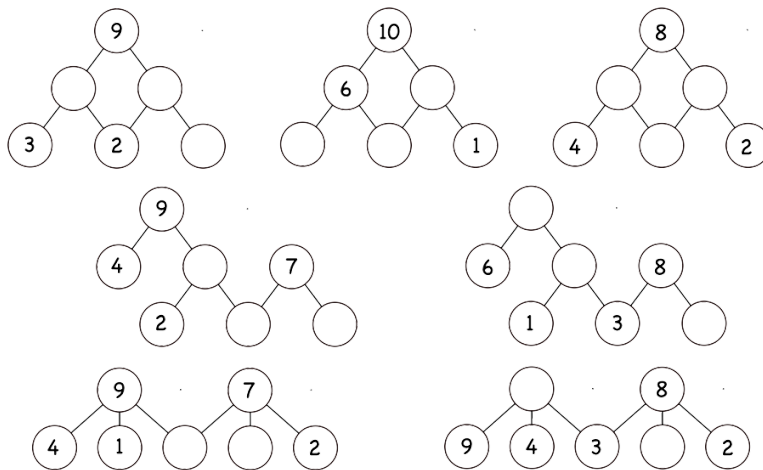
第3章—形狀求和

這些謎題使用以向上方式連接的、帶數字的圓形，每個圓形內的數字等於所有直接在其下方並與之相連的圓形數字之和。

最簡單的謎題中，大部分圓形已經填好數字。這裡有兩個可以直接求解的例子。



當一個圓形被用於多個方向的計算時，這些謎題會變得更加困難。接下來的七個謎題中，除了第一行最右邊的那個之外，都是直接計算。那個謎題比較棘手，因為中間的一個圓形被其上方的兩個未知圓形共享。該謎題涉及的數字足夠小，可以通過少量嘗試錯誤輕鬆解決。

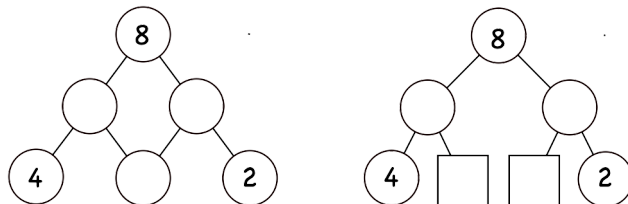


增加這類謎題複雜性的另一種選擇是使用非圓形狀。雖然圓形中的數值可能會與其他圓形或形狀中的數值重複，但非圓形狀中的數值必須與其他相同形狀位置的數值相匹配。例如，所有正方形必須具有相同的數值。利用匹配的形狀來練習相加相同的數字、相近的數字以及平分。

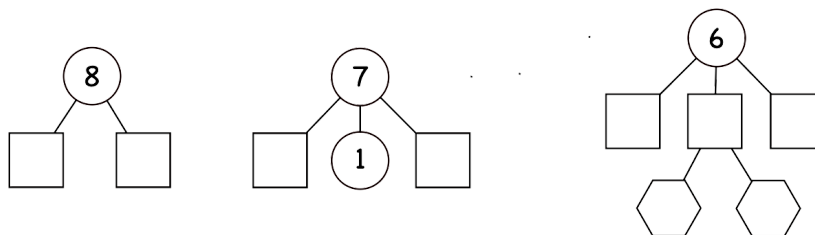
如果您願意，可以增加一條規則：兩個不同形狀的非圓形狀必須具有不同的數值——例如，一個正方形和一個六邊形必須具有不同的數值。

您可以透過以下方式設計這類謎題：先繪製一張已完整填寫數字的圖形，然後移除部分數字。若謎題中存在重複數字，可將該重複數字所在的圓形替換為正方形或其他形狀。

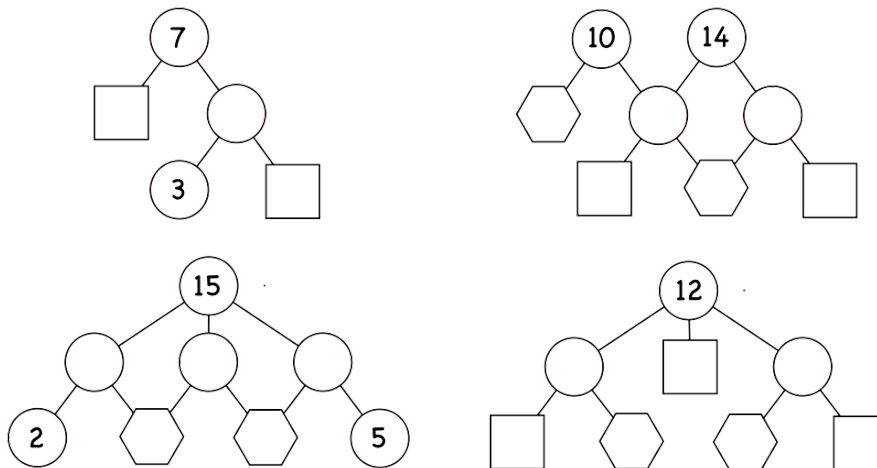
接下來的兩個謎題展示了「從兩個方向共用一個圓形」與「將圓形替換為兩個正方形」之間的心理認知差異。這兩道謎題本質相同，但幼童會發現第一種形式更容易理解與操作。請讓孩子充分練習僅使用圓形的謎題後，再嘗試進階的非圓形謎題。



類似接下來的這三個謎題，對於練習加法中的「加倍」、「近似加倍」與「三倍」非常有用。



以下是一些運用非圓形狀來設計更巧妙謎題的範例。如果您的孩子喜歡這類遊戲，後續還有更多變化等待探索。祝解謎愉快！



第3章—加倍限制取物遊戲

— 單堆玩法 —

設定一個起始總數，例如 20。讓您的孩子選擇要先手還是後手。第一回合中，玩家可從當前總數中減去 1 或 2。後續回合中，玩家可減去的數字範圍為 1 至上回合所減數字的兩倍。最先讓數字歸零者獲勝。

此遊戲存在多種變化形式：

- 最先讓數字歸零者輸掉遊戲。
- 初始可減數字範圍改為 1 到(目標數字-1)或(目標數字-2)。
- 改為從 0 開始相加，最先達到目標數字者獲勝(或落敗)。
- 初始上限設為(目標數字-1)或(目標數字-2)，並將「上回合數值的兩倍」改為「以上回合數值作為本回合上限」。
- 將「兩倍」規則改為「三倍」規則。

如您所見，遊戲存在豐富的變化空間。若您樂在其中，不妨創建屬於自己的家庭規則。

多數情況下，這類遊戲比每次移動選擇固定的傳統取物遊戲更難以分析。

— 多堆玩法 —

另一種創新玩法是使用多組數字。想像場上有數堆代幣(如石子、食物碎塊)，例如兩堆代幣分別為 12 個與 8 個。標準規則是：每次只能從單一堆中取走任意數量的代幣。

其他變化形式包括：

- 使用超過兩堆代幣
- 允許從所有堆中取走相同數量代幣
- 允許從選定堆中取走相同數量代幣
- 只能從數量最多的堆中取代幣

可想而知，這類遊戲還能延伸出更多版本——不過現階段這些內容應該足夠了！

第3章—偶數和奇數和

— 基本設置 —

使用包含少量數字的數字卡組開始，先從三張卡開始，若孩子喜歡這類探索活動，後續可增加卡片數量。

假設數字為 1、2 和 3。問題是：如果隨機抽取兩張卡並相加，得到偶數的機率高還是奇數的機率高？

有兩種方法可以探討這個問題。第一種是進行實驗：洗牌後隨機抽取兩張卡，觀察總和是偶數還是奇數。每次實驗後，在紙張的對應欄位畫記號來統計偶數與奇數結果。

第二種方法是計算得到奇數與偶數的組合數量。例如使用數字 1、2、3 時，得到偶數的組合有一種(1+3)，得到奇數的組合有兩種(1+2、2+3)。因此對於數字 1、2、3 而言，出現奇數總和的機率は偶數的兩倍。

操作過 1、2、3 的組合後，可嘗試其他三張卡組合。數字 2、3、4 的表現是否不同？而 1、3、5 與 2、4、6 這兩組數字為何只會產生偶數總和？熟悉三張卡的操作後，可進一步嘗試四張或更多卡片的組合。

若想設計成遊戲，可讓一位玩家代表「偶數」，另一位代表「奇數」，進行十數次試驗後統計誰的獲勝次數較多。

— 探索分析 —

這類探索活動的趣味在於能引導人們像數學家般玩弄數字。如前所述，嘗試不同三數字組合後，孩子可能會發現：只要組合中至少包含一個偶數與一個奇數，其規律皆相同；但若全為奇數或全為偶數時，總和則全為偶數。這自然引伸出關鍵問題：為何會如此？

經過多次實驗，即使幼童也可能發現這個美妙的數論規則：

- 偶數加偶數等於偶數
- 偶數加奇數等於奇數
- 奇數加奇數等於偶數

這個規則為何成立？建議運用「數字形狀」活動，用兩排代幣來呈現偶數與奇數的結構，思考何時相加會形成兩排數量相等的組合？

一旦發現這個規則，您的孩子可能會意識到具體的數字並不那麼重要。擁有數字 1、2、3 與擁有數字 3、4、5(甚至是 3、12、17)其實並無區別。分析結果實際上取決於偶數和奇數的數量。

考慮到這一點，以下是三數字與四數字組合的可能結果對照表：

3個數字：

- 3 偶數, 0 奇數 → 3 種偶數總和
- 2 偶數, 1 奇數 → 1 種偶數總和, 2 種奇數總和
- 1 偶數, 2 奇數 → 1 種偶數總和, 2 種奇數總和
- 0 偶數, 3 奇數 → 3 種偶數總和

4個數字：

- 4 偶數, 0 奇數 → 6 種偶數總和
- 3 偶數, 1 奇數 → 3 種偶數總和, 3 種奇數總和
- 2 偶數, 2 奇數 → 2 種偶數總和, 4 種奇數總和
- 1 偶數, 3 奇數 → 3 種偶數總和, 3 種奇數總和
- 0 偶數, 4 奇數 → 6 種偶數總和

這些結果令人驚訝，也留下了許多值得探索的空間！若是感興趣，可以繼續研究：五個數字、六個數字或更多數字會如何？為什麼互換偶數與奇數的數量似乎不會改變結果？例如，擁有 3 個偶數和 1 個奇數時，結果竟與 1 個偶數和 3 個奇數相同。而在像 3 個偶數和 1 個奇數這樣不平衡的條件下，為何最終結果會達到平衡？

這正是數學的迷人之處——即便是年幼的孩子也能樂在其中並盡情探索！

第3章—總和組

這類謎題會使用數字網格與一個目標總和。請找出由二、三或四個數字組成的群組，其相加結果需等於目標值。群組成員必須是相鄰的格子。運用不同種類的代幣(如各式食物造型配件)來標示謎題中的每個群組。完成時，整個謎題網格將被已標示的群組完整覆蓋。

6	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td></tr> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td></tr> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td></tr> </table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3
1	2	2								
5	3	4								
1	3	3								

8	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">0</td><td style="background-color: #d9ead3;">8</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td></tr> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td><td style="background-color: #d9ead3;">4</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td></tr> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">6</td><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">5</td><td style="background-color: #d9ead3;">7</td></tr> <tr><td style="background-color: #d9ead3;">1</td><td style="background-color: #d9ead3;">2</td><td style="background-color: #d9ead3;">3</td><td style="background-color: #d9ead3;">1</td></tr> </table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1
0	8	3	2														
2	4	4	3														
6	5	5	7														
1	2	3	1														

此類謎題能特別有效地訓練數字組合能力。透過代幣取代鉛筆標記，您可重複使用同一張謎題紙。

設計此類謎題時，可先準備空白網格，沿網格邊緣填入數字，並運用能相加成為目標總和的數字對或數字三元組來構建。若謎題能具有唯一解會更有趣，但暫不需對此過度憂慮。

6	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	1	6	2	1	0	4	4	1	5	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	1	2	3	5	3	4	1	3	2	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	4	2	1	3	5	1	3	1	4	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	1	0	1	5	5	4	3	3	2
1	2	2																																																
5	3	4																																																
1	3	3																																																
1	6	2																																																
1	0	4																																																
4	1	5																																																
1	2	3																																																
5	3	4																																																
1	3	2																																																
4	2	1																																																
3	5	1																																																
3	1	4																																																
1	0	1																																																
5	5	4																																																
3	3	2																																																

6	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>	5	1	4	2	3	1	3	3	2	2	3	1	5	1	4	2	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	4	5	1	3	2	1	3	3	5	2	2	4	1	3	1	2	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	5	2	4	3	2	3	2	1	1	2	4	3	3	5	1	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	5	2	1	3	2	1	5	1	2	3	1	2	4	3	3
5	1	4	2																																																																	
3	1	3	3																																																																	
2	2	3	1																																																																	
5	1	4	2																																																																	
4	5	1	3																																																																	
2	1	3	3																																																																	
5	2	2	4																																																																	
1	3	1	2																																																																	
1	5	2	4																																																																	
3	2	3	2																																																																	
1	1	2	4																																																																	
3	3	5	1																																																																	
1	5	2	1																																																																	
3	2	1	5																																																																	
1	2	3	1																																																																	
2	4	3	3																																																																	

7	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	2	4	3	5	2	1	6	1	4	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	6	1	1	4	5	4	3	2	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	7	1	3	0	3	4	1	6	3	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>5</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>0</td></tr> </table>	5	1	1	4	4	3	3	7	0	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	4	3	1	2	2	6	1	5
2	4	3																																																
5	2	1																																																
6	1	4																																																
2	6	1																																																
1	4	5																																																
4	3	2																																																
7	1	3																																																
0	3	4																																																
1	6	3																																																
5	1	1																																																
4	4	3																																																
3	7	0																																																
4	4	3																																																
1	2	2																																																
6	1	5																																																

7	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr> </table>	5	2	1	1	6	1	2	6	3	4	3	1	4	3	5	2	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	6	1	4	1	4	5	2	3	3	2	3	4	1	6	3	1	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	4	5	2	1	3	1	3	4	2	3	4	2	3	2	2	1	<table border="1" style="display: inline-table; text-align: left;"> <tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> </table>	2	5	3	4	1	5	4	3	6	2	1	6	6	1	2	5
5	2	1	1																																																																	
6	1	2	6																																																																	
3	4	3	1																																																																	
4	3	5	2																																																																	
6	1	4	1																																																																	
4	5	2	3																																																																	
3	2	3	4																																																																	
1	6	3	1																																																																	
4	5	2	1																																																																	
3	1	3	4																																																																	
2	3	4	2																																																																	
3	2	2	1																																																																	
2	5	3	4																																																																	
1	5	4	3																																																																	
6	2	1	6																																																																	
6	1	2	5																																																																	

8	<table border="1"><tr><td>5</td><td>1</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	1	7	1	2	3	6	2	5	<table border="1"><tr><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	2	4	3	1	4	5	3	4	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	4	4	1	4	2	7	2	3	5	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	7	1	0	1	2	8	5	3	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>	1	0	4	4	8	4	3	6	2
	5	1	7																																															
	1	2	3																																															
6	2	5																																																
6	2	4																																																
3	1	4																																																
5	3	4																																																
4	4	1																																																
4	2	7																																																
2	3	5																																																
7	1	0																																																
1	2	8																																																
5	3	5																																																
1	0	4																																																
4	8	4																																																
3	6	2																																																

8	<table border="1"><tr><td>0</td><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>7</td></tr></table>	2	3	5	3	6	4	3	2	2	4	3	5	4	2	1	7	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	2	3	2	1	3	2	5	2	1	6	1	3	7	4	4	2	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	7	1	2	3	2	1	6	5	3	5	1	3	5	4	4	4
	0	8	3	2																																																																
	2	4	4	3																																																																
	6	5	5	7																																																																
1	2	3	1																																																																	
2	3	5	3																																																																	
6	4	3	2																																																																	
2	4	3	5																																																																	
4	2	1	7																																																																	
2	3	2	1																																																																	
3	2	5	2																																																																	
1	6	1	3																																																																	
7	4	4	2																																																																	
7	1	2	3																																																																	
2	1	6	5																																																																	
3	5	1	3																																																																	
5	4	4	4																																																																	

9	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	0	9	4	6	5	4	3	4	<table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	6	3	4	5	7	3	1	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>	1	2	7	3	5	4	0	9	5	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	1	8	2	3	3	5	4	6	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr></table>	7	4	5	2	6	2	1	8	1
	1	0	9																																															
	4	6	5																																															
4	3	4																																																
5	6	3																																																
4	5	7																																																
3	1	2																																																
1	2	7																																																
3	5	4																																																
0	9	5																																																
4	1	8																																																
2	3	3																																																
5	4	6																																																
7	4	5																																																
2	6	2																																																
1	8	1																																																

9	<table border="1"><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	5	4	3	6	7	4	2	3	2	5	3	6	8	1	1	3	<table border="1"><tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	5	4	5	2	4	2	7	2	6	3	6	1	8	1	2	<table border="1"><tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	2	2	1	3	5	2	6	3	1	3	4	3	7	2	5	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr></table>	2	3	6	3	7	5	3	3	2	2	7	2	5	4	1	8
	5	4	3	6																																																																
	7	4	2	3																																																																
	2	5	3	6																																																																
8	1	1	3																																																																	
5	5	4	5																																																																	
2	4	2	7																																																																	
2	6	3	6																																																																	
1	8	1	2																																																																	
5	2	2	1																																																																	
3	5	2	6																																																																	
3	1	3	4																																																																	
3	7	2	5																																																																	
2	3	6	3																																																																	
7	5	3	3																																																																	
2	2	7	2																																																																	
5	4	1	8																																																																	

10	<table border="1"><tr><td>8</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	8	2	3	5	3	4	5	7	3	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>4</td></tr></table>	6	5	5	1	3	6	2	8	4	<table border="1"><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>	7	5	4	3	1	9	4	6	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td></tr></table>	4	2	1	4	5	3	4	1	6	<table border="1"><tr><td>1</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	9	7	4	3	3	3	4	6
	8	2	3																																															
	5	3	4																																															
5	7	3																																																
6	5	5																																																
1	3	6																																																
2	8	4																																																
7	5	4																																																
3	1	9																																																
4	6	1																																																
4	2	1																																																
4	5	3																																																
4	1	6																																																
1	9	7																																																
4	3	3																																																
3	4	6																																																

10	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	5	3	2	4	3	7	4	5	3	5	6	3	4	1	4	<table border="1"><tr><td>8</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td>9</td></tr></table>	8	9	1	3	1	1	3	4	6	3	5	5	4	7	1	9	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	4	1	5	5	5	3	2	1	6	5	7	2	4	1	6	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	6	8	2	3	1	3	6	3	1	6	5	7	9	4	5
	1	5	3	2																																																																
	4	3	7	4																																																																
	5	3	5	6																																																																
3	4	1	4																																																																	
8	9	1	3																																																																	
1	1	3	4																																																																	
6	3	5	5																																																																	
4	7	1	9																																																																	
4	1	5	5																																																																	
5	3	2	1																																																																	
6	5	7	2																																																																	
4	1	6	3																																																																	
1	6	8	2																																																																	
3	1	3	6																																																																	
3	1	6	5																																																																	
7	9	4	5																																																																	

第3章-動物園救援行動

— 遊戲說明 —

本遊戲需使用兩顆骰子或兩組數字卡(數字1至6)。每位玩家持有6枚代幣(若有動物造型代幣更為理想)，並準備一張標有0至5號格子的紙張。玩家可自行決定如何分配6枚代幣至格子中(同一格子可放置多枚代幣)。

輪到玩家時，透過投擲骰子或抽取兩張數字卡產生兩個數字，計算其差值後，若玩家在對應數字格中存有代幣，即可救回一枚代幣。最先救回所有代幣的玩家獲勝。

— 放置代幣的策略 —

玩家應如何分配6枚代幣？我們可先從簡化問題開始思考：若只有1枚代幣，該放在哪格最有利？顯然應選擇出現機率最高的格子。無需複雜計算，我們可直接列出所有可能性來觀察各差值的出現頻率。

1-1	0		2-1	1		3-1	2		4-1	3		5-1	4		6-1	5
1-2	1		2-2	0		3-2	1		4-2	2		5-2	3		6-2	4
1-3	2		2-3	1		3-3	0		4-3	1		5-3	2		6-3	3
1-4	3		2-4	2		3-4	1		4-4	0		5-4	1		6-4	2
1-5	4		2-5	3		3-5	2		4-5	1		5-5	0		6-5	1
1-6	5		2-6	4		3-6	3		4-6	2		5-6	1		6-6	0

統計結果顯示：差值0出現6次，差值1出現10次，差值2出現8次，差值3出現6次，差值4出現4次，差值5出現2次。顯然，選擇差值1是最佳策略(出現機率10/36)。按出現頻率排序為：1，2，3，0，4，5。

更進階的問題在於如何分配多枚代幣。觀察數據後，可以引導年長孩子思考：為何不該將所有代幣全押在差值1？試想簡化情境：若只有2枚代幣，且只考慮差值1與2的狀況(出現機率分別為10/18與8/18)。若將兩枚代幣都放在差值1，必須連續兩次擲出1才能獲勝；但若在差值1與2各放1枚代幣，則可能透過「先擲出1再擲出2」或「先擲出2再擲出1」的序列成功，這種情況的發生機率高出約60%！

與其進行冗長分析，不如採取直觀策略：將多數代幣放在差值1，次多分配給差值2，並可考慮在差值0或3放置少量代幣。雖無法保證必勝，但長期而言將能獲得可觀的勝率！

第3章—常見點數和

— 調查簡介 —

準備一張畫有12橫列的紙張，每列包含8個方格。最左側的方格依序填入數字1至12，並在每個數字格上放置1枚代幣。開始投擲兩顆骰子，每次擲骰後，根據骰面點數之和，將對應數字的代幣向右移動一格。每個代幣的目標是成為最先移動到該列最右端格子的勝利者。

讓孩子提出值得探索的問題，例如：

- 哪個數字的代幣會獲勝？為什麼？
- 哪些數字表現較好？哪些表現較差？
- 哪個數字的代幣最難獲勝？
- 若增減每列的方格數量，獲勝結果會如何變化？

請孩子先解釋對這些問題的猜想，再透過實際操作驗證想法。也可加入競猜環節，在每輪開始前預測可能獲勝的數字。

— 分析 —

如同前個遊戲的分析方法，最簡單的分析途徑仍是列出所有可能組合來觀察規律。

1 + 1	2		2 + 1	3		3 + 1	4		4 + 1	5		5 + 1	6		6 + 1	7
1 + 2	3		2 + 2	4		3 + 2	5		4 + 2	6		5 + 2	7		6 + 2	8
1 + 3	4		2 + 3	5		3 + 3	6		4 + 3	7		5 + 3	8		6 + 3	9
1 + 4	5		2 + 4	6		3 + 4	7		4 + 4	8		5 + 4	9		6 + 4	10
1 + 5	6		2 + 5	7		3 + 5	8		4 + 5	9		5 + 5	10		6 + 5	11
1 + 6	7		2 + 6	8		3 + 6	9		4 + 6	10		5 + 6	11		6 + 6	12

統計各點數出現的頻率可得：1(0次)、2(1次)、3(2次)、4(3次)、5(4次)、6(5次)、7(6次)、8(5次)、9(4次)、10(3次)、11(2次)、12(1次)。順帶一提，這些數值對於任何涉及兩骰求和的遊戲都是值得牢記的關鍵數據！

由此可知，數字1永遠不可能獲勝，而數字7的勝率最高。不過要注意的是，7與6或8的出現頻率差距其實並不懸殊。若只進行少量投擲，很難斷定哪個數字會勝出；唯有經過大量投擲後，才能確立7最終勝出的必然性。

第3章—數獨變化型

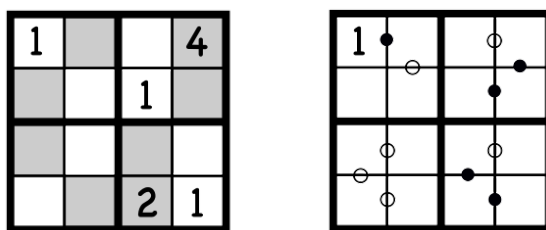
世界上存在各式各樣的數獨變體，更有許多與這些變體相似的謎題。本章將介紹五種數獨變化型，它們都遵循「拉丁方陣」的基礎規則——每個數字在每行每列中必須恰好出現一次。

您可透過以下方式自製這類數獨：先準備已完成解答的對應題型（拉丁方陣或拼圖數獨），本書第一至二章附錄提供的所有數獨解答皆可作為素材。取得解答後，加入特定變體所需的額外提示資訊，再選擇性移除部分或全部數字。

— 附加提示的拼圖數獨 —

這兩種題型屬於拉丁方陣，並附加「每個不規則區域內數字不得重複」的限制。除了拼圖數獨的基礎規則外，它們還具有以下特性：

奇偶數獨：這類謎題中會將偶數格子以灰底標示。此額外線索通常能大幅降低難度，往往可移除幾乎所有數字仍能求解。



點滴數獨：與標準數獨類似，但在相鄰格子間標示兩種圓點。空心圓點表示兩數相差為1，實心圓點表示兩數呈現倍數關係（其中一數為另一數的兩倍）。與奇偶數獨相似，這些附加資訊能簡化謎題，因此可移除絕大多數數字。

— 加減運算數獨 —

這類謎題將盤面劃分為多個附帶目標數字的不規則區域。與標準數獨不同，只要仍符合拉丁方陣規則，區域內允許數字重複。若某區域僅包含單一格，則目標數字即為該格應填數字。

在「求和數獨」中，每個不規則區域內的數字總和必須等於指定的目標數字。而在「差值數獨」裡，所有區域僅包含一或兩個格子：若為雙格區域，則兩數之差必須等於指定目標值。

3+		3	7+
6+	4+		
		6+	4+
7+			

3-	1-	3	2-
		3-	
1-	1		2-
	2-		

至於「加減混合數獨」，則同時運用加法與減法運算。這類謎題會以「+」或「-」標示區域，分別代表需計算總和或差值。

這三類謎題通常初始狀態不預填任何數字，但需注意：單格區域本質上等同已填數字的格子。對於年幼兒童，建議預先填入較多數字，以調整謎題至適合其理解能力的難度。

若要變化運算模式，可改用不同數字組合替代傳統4x4數獨的1至4數字。例如採用1、3、5、7等奇數組合，此時請在謎題上方列出可用數字，方便孩子辨識使用。

第3章—有多少種方法

計算選擇方式的總數往往能帶來有趣的發現。多數這類計數情境若能系統化分析將更清晰，但對孩童而言系統化思考較為困難，這十分正常——此時應讓孩子自由探索，享受發現的樂趣。系統化思考可待其年長後逐步培養。

— 探索活動1 —

如果只用紅色和藍色畫畫，你可以用多少種方式畫出一個有帽子、眼睛和披風的怪物？如果只給帽子和披風上色，情況會如何改變？如果使用三種顏色，或者每種顏色只能使用一次，又會怎樣？

用進階的方式來進行這項探索會涉及乘法，但現在學習還為時過早。不過，你的孩子可以透過實際操作這些概念，開始培養進行這類計數的感覺。

讓我們逐一解決這些問題。帽子可以是紅色或藍色，眼睛可以是紅色或藍色，披風也可以是紅色或藍色。每增加一個需要上色的物件，可能性就會翻倍。因此，2 翻倍後再翻倍，就得到 8 種可能性。把它們列出來是個好方法。用 R 代表紅色，B 代表藍色，並按照帽子、眼睛、披風的順序列出顏色。可能性有：RRR、RRB、RBR、RBB、BRR、BRB、BBR、BBB。

只給帽子和披風上色，就是 2 翻倍，得到 4 種可能性。列出來是：RR、RB、BR、BB。

如果你有三種顏色來塗三個物件，你會有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 種可能性（會是一個很長的清單）。

一般來說，如果事件之間互不影響，就將可能性相乘。如果規定每種顏色只能使用一次，那麼事件之間就會相互限制和影響。讓我們用 G（代表綠色）作為第三種顏色，把它們列出來：RBG、RGB、BGR、BRG、GRB、GBR。

— 探索活動2 —

你有一排 5 顆相同的糖果。要將其中 2 顆塗成紅色、3 顆塗成藍色，有多少種塗色方式？

準備 2 張標記 R 的紙片和 3 張標記 B 的紙片，讓孩子實際排列這十種組合：

RRBBB, RBRBB, RBBRB, RBBBR, BRRBB, BRBRB, BRBBR, BBRRB, BBRBR, BBBRR

理解方式：當確定 2 個紅色的位置後，藍色只能填入剩餘 3 個位置。有趣的是，反過來先決定 3 個藍色位置也會得到相同結果。

若想延伸探索，可調整三個數字（注意：兩個較小數字之和需等於糖果總數）。

— 探索活動3 —

找出用數字 1 和 2 相加得到某總和的所有方法，需分別考慮「不計順序」與「計算順序」兩種情況：

考慮順序：以總和 4 為例：可能組合為 $1+1+1+1$, $2+1+1$, $2+2$ ，共 3 種方式。觀察規律後會發現：實際上是在計算使用 0 到 2 個數字「2」的組合數。通用規則是：偶數結果為「半數+1」，奇數結果為「(數字-1)的半數+1」。

不考慮順序：以總和 4 為例：可能序列為 $1+1+1+1$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $2+2$ ，共 5 種方式。建議透過大量範例製作數值對照表(此處範例延伸至 10)：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

觀察這些數字後，您的孩子可能會發現：每兩個相鄰的數字相加，正好等於下一個數字。為什麼會出現這種現象呢？這些數字被稱為「費波那契數列」，它們在數學中出現的頻率高得令人驚奇。

若要理解這個現象，讓我們以總和為 4 的情況為例，觀察加法序列中的最後一個數字。最後一個數字只能是 1 或 2：若最後一個數字是 1，則前面的數字必須能組成總和為 3 的所有可能序列；若最後一個數字是 2，則前面的數字必須能組成總和為 2 的所有可能序列。因此，組成總和為 4 的序列總數，就等於組成總和為 3 的序列數與組成總和為 2 的序列數之和。

進階探索：若孩子對此興致盎然，可以進一步嘗試使用數字 1 到 3，甚至 1 到 4 來組成各種總和，並計算相應的序列數量。這類情況的規律會更複雜，但玩弄數字的過程同樣充滿樂趣。

第3章—紙牌順序排列

— 簡介 —

這項挑戰的目標是將一套編號紙牌(例如數字1至5)堆疊成特定順序,使其符合以下規則:

翻開最頂端的牌(應為數字1)並放置一旁 → 將下一張牌移到牌堆最底部 → 翻開新的頂端牌(應為數字2)並放置一旁 → 重複流程直至所有卡片按數字順序被翻開。

當孩子能輕鬆完成1至5的排列後,可嘗試擴展到更大數字範圍。

— 系統化方法 —

此謎題的難點在於建立系統化思維。對於任意數量的紙牌,可透過反覆嘗試找出解答,但更重要的是觀察潛在規律。

假設將紙牌按初始順序攤在桌上,以下是前幾種情況的解法範例(箭頭後的數字表示完成第一輪操作後剩餘卡片的排列順序):

1

1 2-> 2

1 3 2-> 3

1 3 2 4-> 3 4

1 5 2 4 3-> 5 4

1 4 2 6 3 5-> 4 6 5

1 6 2 5 3 7 4-> 6 5 7

若卡牌數量為偶數(例如6張),則奇數位置會依序填入前一半的數字(此例為1,2,3),而偶數位置則使用「數量減半的卡牌排列解」並按比例提升數字。以6張牌為例:奇數位填1,2,3;偶數位填4,6,5——這組數字正是3張牌排列解(1,3,2)中每個數字加3的結果。

奇數張卡牌的規律較為巧妙:同樣地,奇數位置會填入前一半左右的數字(以7張牌為例:1至4)。觀察範例會發現,箭頭後的第一張牌將被移到最後,因此該位置應放置此序列中最後需要的卡牌。掌握此關鍵後,即可參照偶數張卡牌的邏輯推導出解答。

第3章—數字差值金字塔

— 簡介 —

挑戰目標是將數字1至6放入金字塔格中：頂層1張卡，第二層2張卡，第三層3張卡，且每個上層數字必須是下層兩個數字的差值。

若遇到困難，可參考兩個提示：

1. 數字6必須位於底層，因為它不可能是任何兩個數字的差值
2. 數字5只能位於底層，或位於中層且正下方對應數字6和1的組合

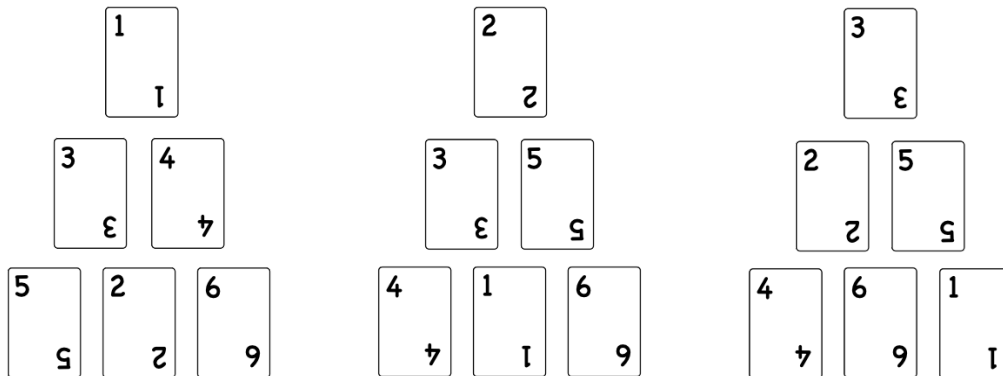
— 什麼是“不同”解法？ —

若孩子能輕鬆解題，可進一步挑戰找出所有解法。此時需引導思考「如何界定不同解法」：若兩個解法互為鏡像，是否應視為不同答案？

建議在開始時先明確標準。由於任何解法的鏡像都易於生成且同樣符合規則，通常可忽略鏡像對稱的解法。此舉能將待探索的解法數量減半。

例如，我們可假定數字6不僅位於底層，且固定在底層的中間或右側位置。延續此思路分析數字5，底層可能布局僅剩四種模式：5 a 6, b 5 6, c 1 6, 或 d 6 1。

接著只需系統性測試a/b/c/d的可能數值。經過試驗會發現：a必為2，b無有效解，c與d必為4。因此排除鏡像後，實際僅存在三種獨立解法：



— 拓展金字塔 —

現在讓我們使用數字1到10的卡牌來搭建一個四層金字塔。這會複雜許多。雖然部分卡牌的位置可以初步確定，但後續仍需投入大量耐心進行推演。由於10不可能是任何兩個數字的差值，它必須位於最底層。同樣地，數字9要麼位於底層，要麼位於倒數第二層，且其下方必須對應數字1和10。數字8和7的放置位置也能幫助我們排除許多不可能的情況。

這意味著底層的排列可能為以下模式之一（不考慮鏡像對稱）：

ab 9 10, c 9 d 10、9 ef 10, gh 10 9, i 9 10 j, 9 k 10 L, mn 1 10, o 1 10 p, qr 10 1

需要考慮的可能性確實非常多！

幸運的是，若進一步分析數字8和7的可能位置，就能將可能性大幅縮減至以下列表（假設推導過程無誤）。一旦確定了底層的排列，後續的填充就相對簡單了：

8 3 10 9、6 1 10 8、8 1 10 6

至於包含15、21或更多數字的金字塔，就留給真正充滿決心的探索者去挑戰了。祝你好運，享受解謎的樂趣！